Les mathématiques sont-elles une axiomatique ou une postulatique ?

1. La géométrie euclidienne : les mathématiques sont une axiomatique (elles sont des vérités médiates à partir de vérités immédiates)

La géométrie euclidienne se fonde sur des principes premiers : les **définitions, les postulats, les axiomes**.

1.1. Les définitions

On trouve chez Euclide un ensemble de définitions, parmi lesquelles :

- (1) Le point est ce qui n'a aucune partie
- (2) Une ligne est une longueur sans largeur
- (3) Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur
- (4) Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence et telle que toutes les droites issues d'un point intérieur vers la circonférence sont égales entre elles
- (5) Un demi-cercle est la figure comprise entre un diamètre et la circonférence d'un cercle
- (6) On appelle triangle rectangle tout triangle qui possède un angle droit
- (7) Les parallèles sont des droites qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre
- (8) Etc.

1.2. Les postulats

- (1) De tout point à tout autre point on peut tracer une ligne droite
- (2) Toute droite finie peut être prolongée indéfiniment et continûment
- (3) Avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer une circonférence
- (4) Tous les angles droits sont égaux entre eux
- (5) Dans un plan, par un point distinct d'une droite, il existe une et une seule droite parallèle à cette droite

1.3. Les axiomes

On trouve chez Euclide un ensemble d'axiomes, parmi lesquels :

- (1) Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles
- (2) Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les tous seront égaux
- (3) Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs égales, les tous seront inégaux
- (4) Si à des grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux
- (5) Les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur sont égales entre elles
- (6) Le tout est plus grand que la partie
- (7) Etc.

2. Les géométries non euclidiennes de Riemann et Lobatchevski plaident en faveur d'une mathématique postulatique (elles sont des systèmes cohérents à partir de postulats admis par convention et qui ne sont ni vrais ni faux)

On peut remettre en cause le 5^{ème} postulat d'Euclide selon lequel *Dans un plan, par un point distinct d'une droite, il existe une et une seule droite parallèle à cette droite*. Pendant longtemps, on a pensé que ce postulat devait être nécessairement conclu des quatre autres : mais il est indépendant des quatre autres, et on peut très bien choisir d'en faire l'économie. On peut supposer, soit qu'aucune parallèle ne passe par un point situé en dehors d'une droite, ou qu'il existe une infinité de parallèles qui passent par un même point situé en dehors d'une droite.

Il n'y a donc pas une seule géométrie, mais plusieurs :

- **La géométrie euclidienne**
- **La géométrie hyperbolique** : dans la géométrie de Riemann, il existe une infinité de parallèles passant par un même point
- **La géométrie elliptique** : Dans la géométrie de Lobatchevski, aucune parallèle n'existe